18 / 4 / 2018 م

المحاضرة التاسعة

تمرين:

لتكن X مجموعة غير خالية ولتكن دالة المجموعات:

$\mu^* : 2^X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$

$$E \longrightarrow \mu^*(E) = \begin{cases} 0 & ; E = \phi \\ 1 & ; E \neq \phi \end{cases}$$

المطلوب:

١- اثبت ان μ^* قياس خارجي على X

ب- اوجد الصف $\mathcal{M}$

٢- اوجد القياس التابع لـ μ^* اي $\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$

الحل:

١) من ١) $\mu^*(\phi) = 0$ بالفرض

(ق ٢) لتكن $E, F \in 2^X$ مع $E \subset F$

ولنثبت انه $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$

وهنا يوجد ثلاث حالات:

أ) $F = \phi \Leftarrow E = \phi \Leftarrow \mu^*(E) = 0 = \mu^*(F)$

ب) $F \neq \phi \Leftarrow$ اما $E = \phi \Leftarrow \mu^*(E) = 0 \leq 1 = \mu^*(F)$

او $E \neq \phi \Leftarrow \mu^*(E) = 1 = \mu^*(F)$

(ق ٣) لتكن $E_1, E_2, E_3, \ldots \in 2^X$ ولنثبت انه

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

وهنا يوجد الحالات الاتية:

أ) المجموعات $E_n = \phi$ من اجل كل n $\Leftarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \phi$

$$\Leftarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

/ /

ب) بوجود على الأقل مجموعة $E_n \neq \phi \Leftarrow (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \neq 0$

وبالتالي:

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

∴ μ^* قياس خارجي على 2^X

٢) إيجاد صف المجموعات القيوسة $\mathcal{M}_{\mu^*}$

يتألف الصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$ من كل المجموعات E حيث:

$$E \in 2^X , \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E)^c \quad ; \forall A \subset 2^X$$

وهنا لدينا الحالات الآتية:

أ) $A = \phi \Leftarrow \mu^*(A) = 0$ وبالتالي الحالات الممكنة هي

$0 = 0 + 0$

أي أنّ $A \cap E = \phi$ ، $A \cap E^c = \phi$

وهذا يصح من أجل كل $E \in 2^X$

ب) $A \neq 0 \Leftarrow \mu^*(A) = 1$ الحالات الممكنة هي:

إما ب١) $1 = 1 + 0$

أو ب٢) $1 = 0 + 1$

أي أنّ: ب١) تكون $A \cap E \neq \phi , A \cap E^c = \phi \Leftarrow E = X$

ب٢) تكون $A \cap E = \phi , A \cap E^c \neq \phi \Leftarrow E = \phi$

وبذلك يكون

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{\phi , X\}$$

٣) القياس $\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ هو:

$$\mu : \mathcal{M}_{\mu^*} \to [0, +\infty]$$

$$\emptyset \to \mu(\emptyset) = 0$$

$$X \to \mu(X) = 1$$

تمرين -٢-

لتكن X مجموعة غير منتهية وغير معدودة.

ولتكن دالة المجموعات $\mu^* : 2^X \to [0, +\infty]$

$$E \to \mu^*(E)$$

معرفة بالشكل:

$\mu^*(E) = 0$ اذا كانت E معدودة على الأكثر

$\mu^*(E) = 1$ 〃 〃 E غير 〃 〃 〃

المطلوب:

١) اثبت أن μ^* قياس خارجي

٢) أوجد الصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$

٣) 〃 القياس الناتج عن μ^* أي ($\mu = \mu^* |_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$)

الحل:

١) (قخ ١) بالفرض $\mu^*(\emptyset) = 0$ لأنّ $\emptyset$ مجموعة معدودة على الأكثر (تحوي ٠ عنصر)

(قخ ٢) لتكن $F \subset 2^X$ و E حيث $E \subset F$

ولنثبت أن $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ ؟

هناك عدد من الحالات الآتية:

/ /

(أ) F معدودة على الأكثر ⇐ E معدودة على الأكثر وبالتالي:

$$\mu^*(E) = 0 = \mu^*(F)$$

(ب) F غير معدودة على الأكثر ⇐ إما: E معدودة على الأكثر ⇐

$$\mu^*(E) = 0 \leq 1 = \mu^*(F)$$

أو: E غير معدودة على الأكثر ⇐

$$\mu^*(E) = 1 \leq 1 = \mu^*(F)$$

(م ٣٢)

لتكن $E_1, E_2, \dots \in 2^X$ ولنثبت أن

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

وهناك الحالات الآتية:

(أ) المجموعات E_n كلها معدودة على الأكثر ⇐ $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ مجموعة معدودة على الأكثر

$$\Leftarrow \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

(ب) يوجد على الأقل مجموعة E_n غير معدودة ⇐ $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ مجموعة غير معدودة ⇐

وبالتالي: $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

∴ μ^* قياس خارجي على 2^X

2 ٭-إيجاد صف المجموعات المقيسة $\mathcal{M}_{\mu^*}$ أو $\mathcal{M}$ ⇐

يتألف الصف $\mathcal{M}$ من كل المجموعات E حيث

$$E \subset 2^X, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\forall A \in 2^X$$

يارب يا معين ♥

القياس عملي ١
2017-2018م

التتمة للحل ...

وهنا نميز الحالات الآتية :

أ- المجموعة A معدودة على الأكثر ⟸ $\mu^*(A) = 0$

والحالات الممكنة هنا هي :

$0 = 0 + 0$

وهذا يعني أنه $A \cap E$ معدودة على الأكثر وكذلك
$A \cap E^c$ " " " وهذا يصح من أجل كل E

ب- المجموعة A غير معدودة على الأكثر ⟸ $\mu^*(A) = 1$

⟸ الحالات الممكنة : هي إما ب١) $1 = 1 + 0$

أو ب٢) $1 = 0 + 1$

إن ب١ :

ب١) تكون المجموعة $A \cap E$ غير معدود بينما $A \cap E^c$ معدودة

⟸ E^c معدودة على الأكثر

ب٢) تكون المجموعة $A \cap E$ معدودة بينما المجموعة $A \cap E^c$ غير معدودة

⟸ E معدودة ،

وبالتالي تكون

$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{E \in 2^X$; إما E معدودة على الأكثر أو E^c معدودة على الأكثر $\}$

٢) القياس $\mu = \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ هو :

$\mu : \mathcal{M}_{\mu^*} \longrightarrow]-\infty, +\infty]$

$E \longrightarrow \mu(E) = \begin{cases} 0 , & E \text{ معدودة} \\ 1 , & E \text{ غير معدودة} \end{cases}$

ملاحظة :

لو اخذنا مثلاً مجموعة $X = \mathbb{R}$ وهي غير منتهية وغير معدودة فنجد ان مجموعات :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, [0,1] \cap \mathbb{Q} \ldots$$

تنتمي للصف $\mathcal{M}_{\mu^*}$ (لأنها معدودة)

بينما المجموعة $E = [0,1]$ لا تنتمي الى $\mathcal{M}_{\mu^*}$

لأن E ليست معدودة وكذلك المتممة $E^c = \mathbb{R} \setminus [0,1]$ ليست معدودة .

انتهت المحاضرة .